# 1 Exercices

## 1.1 Estimations d'échelle pour la contamination radioactive

Un accident nucléaire a conduit à une contamination radioactive dans sa zone environnante d'un rayon de $R = 1 \times 10^4\,\mathrm{m}$. Le profil de concentration détaillé du contaminant, $c(x, y)$, est inconnu, mais les mesures indiquent que $c = c_0 = 20\,\mathrm{mg\,m^{-2}}$ près du site de l'accident. Sur la base d'**arguments d'échelle**, laquelle des affirmations suivantes est *incorrecte* ?

a. La masse totale de contaminant sur la zone affectée, $m$, pourrait être de l'ordre de $2 \times 10^3\,\mathrm{kg}$
b. Si le rayon de la zone affectée était en fait dix fois plus grand, alors $m$ aurait été environ dix fois plus grand aussi
c. Le taux d'augmentation de la concentration de contaminant à mesure qu'on s'approche du site de l'accident, $\mathrm{d}c/\mathrm{d}r$, pourrait être de l'ordre de $2 \times 10^{-3}\,\mathrm{mg\,m^{-3}}$
d. Si toutes les mesures de masse étaient rapportées en grammes au lieu de milligrammes, alors la valeur numérique exacte de $\mathrm{d}c/\mathrm{d}r$ aurait été mille fois plus petite

## 1.2 Interprétation de la longueur de pénétration

Considérez la **longueur de pénétration**, $\delta$, dans le contexte du problème de réaction-diffusion stationnaire. Laquelle des affirmations suivantes est *correcte* ?

a. $\delta$ peut être interprété comme la distance attendue qu'une molécule de réactif typique diffuse dans le domaine semi-infini $x > 0$ avant d'être consommée
b. Plus la réaction est rapide (*c'est-à-dire*, plus $k_V$ est grand), plus $\delta$ est grand
c. $c(\delta) = 0$
d. La concentration totale $C = \int_0^\infty c(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\delta c(x)\,\mathrm{d}x$

## 1.3 Interprétation des relations d'échelle

Nous avons étudié le problème de **réaction-diffusion stationnaire** donné mathématiquement par :

$$D\frac{\mathrm{d}^2c}{\mathrm{d}x^2} = k_V c,$$

$$c(x = 0) = c_0,$$

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}(x = \infty) = 0,$$

où la réaction consomme l'espèce d'intérêt selon une *cinétique du premier ordre*, la diffusion suit la *loi de Fick* avec une diffusivité constante, et le domaine du système est semi-infini en 1D ($0 < x < \infty$). Ce problème a une solution analytique exacte :

$$c(x) = c_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{k_V}{D}}x\right),$$

à partir de laquelle nous pouvons obtenir des expressions exactes pour le flux à $x = 0$ et la concentration totale d'espèces dans le domaine. Cependant, nous avons montré qu'il est possible d'obtenir des estimations d'échelle pour ces quantités sans résoudre le problème exactement, qui pour ce problème coïncident avec les résultats exacts.

La longueur de pénétration, ou la longueur de la région dans laquelle $c$ est "appréciablement au-dessus de zéro", est notée $\delta$. Son échelle découle de l'EDO gouvernante :

$$\frac{Dc_0}{\delta^2} \sim k_V c_0 \Rightarrow \delta \sim \sqrt{\frac{D}{k_V}}.$$

Comme la longueur de pénétration manque d'une définition précise dans ce problème, nous sommes libres de définir la quantité $\delta$ en remplaçant le "$\sim$" dans la relation ci-dessus par un "$=$".

Ensuite, la densité de flux à $x = 0$ est de l'ordre de :

$$F = -D\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}(x = 0) \sim D\frac{c_0}{\delta} \sim c_0\sqrt{Dk_V}.$$

Notez que nous abandonnons généralement les signes négatifs dans les analyses d'échelle car nous nous intéressons aux magnitudes absolues des quantités.

Enfin, la concentration totale de particules dans le domaine est de l'ordre de :

$$C = \int_0^\infty c\,\mathrm{d}x \sim c_0\delta \sim c_0\sqrt{\frac{D}{k_V}}.$$

Pour le moment, nous considérerons un cas spécifique d'un tel problème de réaction-diffusion : supposons $c_0 = 3 \times 10^{-3}\,\mathrm{mol\,m^{-3}}$, $D = 2 \times 10^{-9}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$, et $k_V = 5 \times 10^{-7}\,\mathrm{s^{-1}}$. Selon notre analyse d'échelle, à l'état stationnaire, nous prédisons une longueur de pénétration de :

$$\delta = \sqrt{\frac{D}{k_V}} = \sqrt{\frac{2 \times 10^{-9}}{5 \times 10^{-7}}} \simeq 6 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}.$$

Maintenant, considérez les affirmations ci-dessous. Laquelle des affirmations suivantes est *incorrecte* ?

a. La concentration du réactif est presque nulle à 1 m de la frontière
b. La densité de flux du réactif entrant dans le domaine à l'état stationnaire est de l'ordre de $1 \times 10^{-10}\,\mathrm{mol\,m^{-2}\,s^{-1}}$
c. Changer la concentration du réactif à la frontière n'affecte pas la longueur de pénétration
d. Si, en augmentant la température du système, nous parvenons à doubler la diffusivité $D$ mais à tripler la constante de vitesse de réaction $k_V$, la quantité totale de réactif dans le domaine augmenterait

## 1.4 Analyse d'échelle basée sur la conservation intégrale

Le même problème de réaction-diffusion stationnaire peut être analysé avec un bilan intégral pour l'espèce réagissante comme suit :

$$\oint_A \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}\,\mathrm{d}A = \int_V R_V\,\mathrm{d}V$$

$$-D\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}(x = \infty) + D\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}(x = 0) = -\int_0^\infty k_V c\,\mathrm{d}x$$

$$-D\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}(x = 0) = \int_0^\infty k_V c\,\mathrm{d}x.$$

Considérez l'échelle des termes dans l'équation de conservation intégrale ci-dessus. Laquelle des affirmations suivantes est *incorrecte* ?

a. Le côté gauche du bilan intégral, $-D\mathrm{d}c/\mathrm{d}x\,(x=0)$, correspond à la densité de flux du réactif entrant à $x=0$, qui est de l'ordre de $F \sim c_0\sqrt{Dk_V}$ comme nous l'avons déterminé précédemment
b. Le côté droit du bilan intégral, $\int_0^\infty k_V c\,\mathrm{d}x$, donne le taux total de production par réaction dans tout le domaine du système
c. $\int_0^\infty k_V c\,\mathrm{d}x \sim k_V c_0 \delta \sim k_V c_0 \sqrt{\frac{D}{k_V}} \sim c_0\sqrt{Dk_V}$
d. Les deux côtés du bilan intégral ont la même échelle

## 1.5 Refroidissement de la soupe

La soupe est servie ! À $T_0 = 95\,°\mathrm{C}$, elle est trop chaude pour une consommation immédiate, vous décidez donc de la refroidir d'abord. Pendant que la soupe rejette de la chaleur dans son environnement, qui est maintenu à $T_\infty = 25\,°\mathrm{C}$, vous la remuez vigoureusement, gardant la température uniforme. Supposez que le taux de perte de chaleur est décrit par un **coefficient de transfert de chaleur** moyen, $\overline{h}$, tel que :

$$\oint_A \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q}\,\mathrm{d}A = \overline{h}A\,(T - T_\infty)\,,$$

où $T\,(t)$ est la température de la soupe, $A$ est la surface effective de transfert de chaleur.

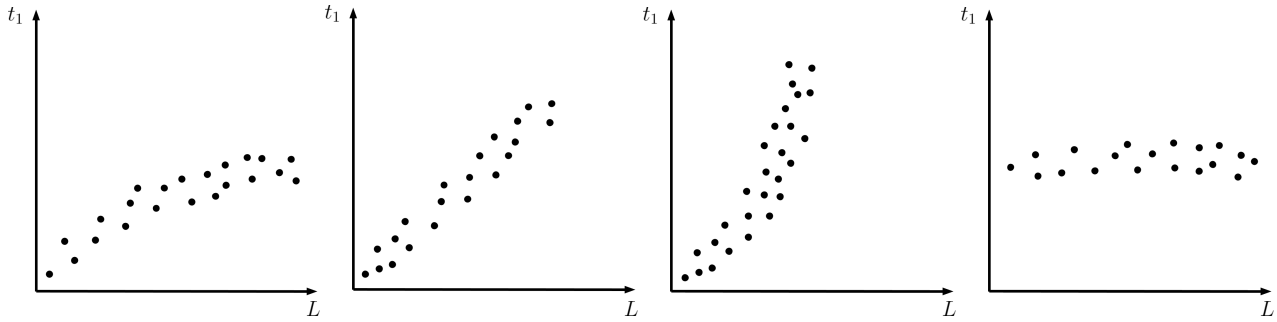
1. Dérivez une EDO pour $T\,(t)$ basée sur un bilan intégral pour l'énergie thermique contenue dans la soupe, et énoncez la condition initiale associée. Supposez que toutes les propriétés matérielles (densité, $\rho$; capacité thermique spécifique, $c_p$; conductivité thermique, $k$; etc.) sont constantes, et que la perte de masse due à l'évaporation est négligeable (masse $m$ et volume $V$ de la soupe constants).

En supposant que les trois dimensions (hauteur, largeur, longueur) du bol de soupe sont comparables, nous pouvons supposer que le volume et la surface effective de la soupe sont de l'ordre de $V \sim L^3$ et $A \sim L^2$, respectivement, où $L$ est la longueur caractéristique du bol de soupe.

2. Dérivez l'**échelle** de l'**échelle de temps physique** pour le refroidissement de la soupe, $\tau$, en termes de $\rho$, $\overline{h}$, $c_p$, et $L$.

Pour tester la relation d'échelle que nous avons identifiée, vous décidez de mener une série d'expériences où vous refroidissez la même soupe chaude dans les mêmes conditions, mais dans des bols de différentes tailles, marqués par leurs longueurs caractéristiques, $L$. Supposez que les bols ont la même forme et sont tous remplis de manière similaire. Vous attendez que la soupe dans chaque bol refroidisse à une *température spécifique*, $T_1 = 50\,°\mathrm{C}$, à laquelle elle devient suffisamment froide pour être consommée, et vous enregistrez le temps de refroidissement, $t_1$. Vous créez un nuage de points de $t_1$ en fonction de $L$ à partir des mesures recueillies.

3. Considérez les quatre figures ci-dessous. Quelle figure a les caractéristiques qualitatives que vous attendriez de la relation d'échelle dérivée ?



4. Trouvez une estimation d'échelle pour le coefficient de transfert de chaleur moyen, $\overline{h}$, pour le refroidissement évaporatif de la soupe dans un bol avec agitation, basée sur l'expérience quotidienne.

## 1.6 Nombre de Damköhler

Considérez la réaction-diffusion stationnaire dans une particule approximativement sphérique avec un rayon moyen de $L$. La réaction homogène suit une cinétique du premier ordre, qui est décrite par la constante de vitesse $k_V$. La diffusion suit la loi de Fick, avec une diffusivité chimique constante de $D$. En définissant le nombre de Damköhler comme $\mathrm{Da} = k_V L^2/D$, nous calculons $\mathrm{Da} = 98.2$ pour notre système. Sur la base de cette information, laquelle des affirmations suivantes est *incorrecte* ?

a. Parce que $\mathrm{Da} \gg 1$, physiquement parlant, nous sommes dans le régime des *réactions rapides*
b. Comparée à la concentration du réactif à la surface de la particule, la concentration près du centre de la particule est presque nulle
c. Une couche limite se forme sur le côté intérieur de la surface de la particule, dont l'épaisseur $\delta$ est d'environ un centième de $L$
d. Da deviendrait encore plus grand si la diffusivité était plus petite, en gardant toutes les autres conditions inchangées

## 1.7 Équations adimensionnelles

Considérez la **formulation adimensionnelle** du problème de réaction-diffusion stationnaire. Lesquelles des affirmations suivantes sont correctes ? Sélectionnez *toutes* celles qui s'appliquent.

a. La *concentration adimensionnelle*, $\Theta = c/c_0$, varie entre zéro et l'unité à l'intérieur de la particule, où $c_0$ est la concentration de surface du réactif
b. La *coordonnée de longueur adimensionnelle*, $\widetilde{x}$, varie entre zéro et l'unité (ou peut-être deux), où $L$ est le rayon de la particule (en supposant qu'elle soit parfaitement sphérique) et $x$ est la profondeur perpendiculaire dans la particule depuis sa surface
c. Dans l'*EDO adimensionnelle*, $\widetilde{\nabla}^2\Theta = \mathrm{Da}\,\Theta$, le terme de chaque côté de l'équation est toujours d'ordre un, *c'est-à-dire*, $\widetilde{\nabla}^2\Theta \sim \mathrm{Da}\,\Theta \sim 1$, pour tous les Da
d. La *condition aux limites adimensionnelle* est énoncée comme $\Theta = 1$ à la surface de la particule, étant donné que $c = c_0$ en tous points sur la surface
e. Le processus d'*adimensionnalisation* implique de définir des *variables adimensionnelles*, chacune comme le rapport d'une quantité dimensionnelle à son *échelle* appropriée
f. La solution de la formulation adimensionnelle du problème a une plus grande utilité générale, car elle représente un ensemble de problèmes qui impliquent différentes valeurs de paramètres mais sont physiquement apparentés

## 1.8 Réactions homogènes d'ordre supérieur

En général, l'équation différentielle ordinaire régissant la **réaction-diffusion stationnaire** pour un problème de réaction-diffusion d'ordre $n$ est donnée par :

$$Dc'' = k_V c^n,$$

$$c'(0) = 0, \quad \text{et} \quad c(L) = c_0,$$

où la réaction consomme l'espèce d'intérêt avec un taux volumétrique de $R_V = -k_V c^n$. L'EDO est *non linéaire* si $n$ n'est pas égal à 0 ou 1. Les équations linéaires sont celles dans lesquelles la fonction $c$ et ses dérivées apparaissent linéairement dans l'équation. En général, les équations non linéaires sont plus difficiles à

résoudre et nécessitent souvent des solutions numériques. Cependant, nous pouvons obtenir quelques aperçus analytiques via l'**analyse d'échelle**, comme nous le montrerons dans l'exemple suivant.

Nous considérons la réaction-diffusion stationnaire dans une plaque catalytique poreuse d'épaisseur $L$. Nous voulons comprendre comment les limitations de transport et de réaction de notre catalyseur dépendent de la concentration en masse du réactif $c_0$, de la constante de vitesse de la réaction $k_V$, de l'épaisseur de notre catalyseur $L$, de la diffusivité du réactif $D$, et de l'ordre de la réaction $n$.

Nous pouvons adimensionnaliser les équations ci-dessus pour arriver à :

$$\Theta'' = \mathrm{Da}\,\Theta^2,$$
$$\Theta'(0) = 0, \quad \text{et} \quad \Theta(1) = 1.$$

Comment doit être défini le nombre de Damköhler général pour une réaction d'ordre $n$, Da ?

## 1.9 Isolation d'un réacteur chauffé électriquement

Nous allons analyser un problème connexe en transfert de chaleur. Considérons un réacteur dont nous voulons maintenir le contenu à une température spécifique, $T_1$, qui est plus élevée que la température ambiante, $T_2$. Des ingénieurs ont proposé d'utiliser le chauffage par effet Joule à travers une couche d'isolation électriquement conductrice autour du réacteur pour maintenir l'intérieur du réacteur, qui est bien mélangé, à la température désirée. Dans cette isolation d'épaisseur $L$, il y a une production volumétrique constante de chaleur, $H_V$, entraînée par le courant électrique constant à travers l'isolation. Nous voulons analyser la conception de cette couche pour minimiser le coût du chauffage. Nous formulons le modèle mathématique suivant pour décrire la conduction thermique dans la couche d'isolation :

$$0 = k\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} + H_V,$$
$$T(0) = T_1, \quad \text{et} \quad T(L) = T_2,$$

où $H_V$ est une constante avec des unités de $\mathrm{J\,m^{-3}\,s^{-1}}$, et $x = 0$ et $x = L$ correspondent aux surfaces intérieure et extérieure de la couche d'isolation.

1. Parmi les options ci-dessous, sélectionnez *toutes* les hypothèses nécessaires pour arriver à la formulation ci-dessus.
   a. État stationnaire
   b. Température uniforme dans l'isolation
   c. Variations de température dans une seule dimension
   d. Capacité thermique volumétrique constante, $\rho c_p$
   e. Conductivité thermique constante $k$

L'adimensionnalisation du problème ci-dessus aboutit à un problème adimensionnel de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\widetilde{x}^2} = -\,\mathrm{Da}_T,$$
$$\Theta(0) = 1, \quad \text{et} \quad \Theta(1) = 0.$$

2. Comment doit être défini le nombre de Damköhler effectif, $\mathrm{Da}_T$ ?

Nous voulons ensuite résoudre le problème adimensionnel. En particulier, nous aimerions déterminer la quantité de chauffage nécessaire pour une *isolation parfaite* du réacteur, où le flux de chaleur à travers la surface $x = 0$, ou l'interface entre l'intérieur du réacteur et la couche d'isolation, est nul.

3. Déterminez le taux de chauffage adimensionnel, $\mathrm{Da}_T$, qui répond à cet objectif de conception.

## 1.10 Fonctions de Bessel modifiées

Nous avons introduit une fonction spéciale, $I_0(z)$, comme l'analogue cylindrique ($d = 2$) de la **fonction cosinus hyperbolique**, $\cosh(z)$, pour la réaction-diffusion stationnaire dans une "plaque" ou un "film" ($d = 1$). En exploitant les similitudes qualitatives entre $I_0(z)$ et $\cosh(z)$, laquelle des affirmations suivantes sur $I_0(z)$ est probablement *incorrecte* ? (Incidemment, $I_0$ est une **fonction modifiée de première espèce** ; l'indice "0" fait référence à son **ordre**.)

a. $\Theta(r) = I_0(ar)$ satisfait l'EDO ($a > 0$ est une constante) :

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}r}\right] = a^2\Theta$$

b. $I_0(z)$ est une fonction impaire
c. $I_0'(z) = 0$
d. $I_0(z) > I_0(0)$ pour tout $z > 0$

## 1.11 Fonctions de Bessel sphériques modifiées

Dans ce problème, nous introduirons une autre fonction spéciale qui apparaît dans les problèmes de réaction-diffusion en 3D. Notée $i_0(z)$, c'est l'une des **fonctions de Bessel sphériques modifiées de première espèce**, et c'est l'analogue sphérique du $\cosh(z)$ rectangulaire et du $I_0(z)$ cylindrique. Encore une fois, ces trois fonctions sont liées aux solutions du problème :

$$\widetilde{\nabla}^2\Theta = \mathrm{Da}\,\Theta$$

dans des domaines symétriques avec différents nombres de dimensions. Pour un domaine radialement symétrique en 3D, *c'est-à-dire* une sphère, nous pouvons énoncer le problème plus explicitement en termes de coordonnée radiale adimensionnelle $\widetilde{r} = r/R$, où $R$ est le rayon de la sphère (et donc l'*échelle de longueur géométrique* dans le problème). Avec les conditions aux limites, nous avons :

$$\frac{1}{\widetilde{r}^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\widetilde{r}}\left[\widetilde{r}^2\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\widetilde{r}}\right] = \mathrm{Da}\,\Theta,$$

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\widetilde{r}}(\widetilde{r} = 0) = 0,$$

$$\Theta(\widetilde{r} = 1) = 1.$$

Similairement aux cas rectangulaire et cylindrique, la solution au problème ci-dessus est :

$$\Theta(\widetilde{r}) = \frac{i_0\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\widetilde{r}\right)}{i_0\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\right)}.$$

Il s'avère que $i_0(z)$ peut être exprimée en termes de fonctions élémentaires. Sur la base de la description mathématique et de votre compréhension physique du problème, sélectionnez la définition correcte de $i_0(z)$ parmi les options ci-dessous :

a. $i_0(z) = 1 + z^4$
b. $i_0(z) = \sinh(z)$
c. $i_0(z) = \exp(-z)/z$
d. $i_0(z) = \sinh(z)/z$

## 1.12 Bases de solution pour les EDO de réaction-diffusion

Nous avons analysé la réaction et la diffusion du premier ordre à l'état stationnaire dans des domaines avec différents nombres de dimensions, $d$, qui sont radialement symétriques, *c'est-à-dire* des "plaques" ou des "films" pour $d = 1$, des cylindres pour $d = 2$, et des sphères pour $d = 3$. Tous ces problèmes sont modélisés avec des EDO de la forme :

$$\frac{1}{\widetilde{r}^{d-1}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\widetilde{r}} \left[ \widetilde{r}^{d-1} \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\widetilde{r}} \right] = \mathrm{Da}\, \Theta.$$

Nous avons montré que lorsqu'elle est soumise à la *condition aux limites symétrique* à $\widetilde{r} = 0$ :

$$\Theta'(0) = 0,$$

la solution de l'EDO peut être exprimée en termes de fonctions spéciales : $\cosh(z)$, $I_0(z)$, et $i_0(z)$ pour $d = 1$, $d = 2$, et $d = 3$, respectivement, grâce au fait que ce sont toutes des fonctions paires qui satisfont automatiquement la condition aux limites de symétrie.

Dans ce problème, nous discuterons de la façon dont les variations dans les conditions aux limites peuvent affecter les formes générales des solutions. En rappelant la théorie des EDO, nous reconnaissons que notre EDO de réaction-diffusion adimensionnelle montrée ci-dessus est une équation *homogène*, *linéaire*, *du second ordre* pour $d = 1, 2, 3$. Ainsi, nous nous attendons à ce que sa solution générale $\Theta(\widetilde{r})$ prenne la forme d'une combinaison linéaire de *deux* solutions linéairement indépendantes, qui forment une **base de solution**. Il peut y avoir plus d'une façon courante d'exprimer la base, comme nous l'avons vu avec le cas $d = 1$ ("film" ou "plaque") – nous pouvons écrire la solution générale comme :

$$\Theta(\widetilde{r}) = A_1 \exp\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\widetilde{r}\right) + B_1 \exp\left(-\sqrt{\mathrm{Da}}\widetilde{r}\right),$$

ou :

$$\Theta(\widetilde{r}) = A_2 \cosh\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\widetilde{r}\right) + B_2 \sinh\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\widetilde{r}\right)$$

où $A_1$, $B_1$, $A_2$, et $B_2$ sont des coefficients indéterminés qui peuvent être calculés étant donné les deux conditions aux limites requises. Par exemple, nous avons discuté de la façon dont la condition aux limites de symétrie, $\Theta'(0) = 0$, implique que $B_2 = 0$, ce qui simplifie considérablement la forme de la solution lorsqu'on travaille avec la deuxième base.

Maintenant, nous introduisons quelques fonctions supplémentaires pour compléter les bases de solution pour les problèmes de réaction-diffusion stationnaires dans des dimensions supérieures. Pour $d = 2$, la solution générale est couramment écrite en utilisant une base impliquant des **fonctions de Bessel modifiées** :

$$\Theta(\widetilde{r}) = A_3 I_0\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\widetilde{r}\right) + B_3 K_0\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\widetilde{r}\right),$$

où $A_3$ et $B_3$ sont des coefficients indéterminés. Nous allons maintenant clarifier quelques terminologies : $I_\nu$ désigne la **fonction de Bessel modifiée de première espèce** d'ordre $\nu$, et $K_\nu$ désigne la **fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce** d'ordre $\nu$. Bien qu'il n'existe pas d'expressions analytiques simples pour les fonctions de Bessel modifiées en termes de fonctions élémentaires, leurs propriétés sont facilement disponibles en ligne et peuvent également être trouvées dans divers manuels de mathématiques et d'ingénierie. Les logiciels de calcul modernes incluent souvent des fonctions intégrées pour évaluer les diverses fonctions de Bessel modifiées (ainsi que les *fonctions de Bessel*).

Enfin, pour $d = 3$, la solution générale peut être écrite en termes de **fonctions de Bessel sphériques modifiées** :

$$\Theta(\widetilde{r}) = A_4 i_0\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\widetilde{r}\right) + B_4 k_0\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\widetilde{r}\right),$$

où $i_0$ et $k_0$ désignent respectivement les fonctions de Bessel sphériques modifiées de première et de deuxième espèce d'ordre zéro. Contrairement aux *fonctions de Bessel modifiées*, toutes les *fonctions de Bessel sphériques modifiées* peuvent être exprimées en termes de *fonctions élémentaires*. En particulier, les fonctions de Bessel sphériques modifiées de première et de deuxième espèce d'ordre zéro sont données par :

$$i_0(z) = \frac{\sinh(z)}{z}, \quad k_0(z) = \frac{\exp(-z)}{z}.$$

Alternativement, nous pouvons écrire la solution générale du problème de réaction-diffusion sphérique comme :

$$\Theta(\widetilde{r}) = A_5 \frac{\exp\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\widetilde{r}\right)}{\widetilde{r}} + B_5 \frac{\exp\left(-\sqrt{\mathrm{Da}}\widetilde{r}\right)}{\widetilde{r}}.$$

Comme précédemment, $A_4$, $B_4$, $A_5$, et $B_5$ sont tous des coefficients indéterminés. Notez que nous avons facultativement absorbé les facteurs $\sqrt{\mathrm{Da}}$ dans les coefficients $A_5$ et $B_5$ en écrivant l'équation ci-dessus.

Nous avons affirmé que les bases :

$$\{i_0(z), k_0(z)\}$$

et

$$\left\{\frac{\exp(z)}{z}, \frac{\exp(-z)}{z}\right\}$$

engendrent le même espace de solution. C'est-à-dire qu'il existe une application bijective $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que pour tout $(A_4, B_4) \in \mathbb{R}^2$, nous avons :

$$A_4 i_0(z) + B_4 k_0(z) = A_5 \frac{\exp(z)}{z} + B_5 \frac{\exp(-z)}{z},$$

où $(A_5, B_5) = \varphi(A_4, B_4)$.

Que vaut l'application $\varphi$ ?

## 1.13 Identités différentielles des fonctions hyperboliques, de Bessel modifiées et de Bessel sphériques modifiées

Nous avons étudié une variété de fonctions nécessaires pour exprimer les solutions aux problèmes de réaction-diffusion du premier ordre stationnaire dans diverses géométries. Nous aimerions maintenant discuter de certaines de leurs *identités différentielles*, qui sont nécessaires pour différencier (et intégrer) les solutions aux problèmes de réaction-diffusion pour calculer les flux (et les concentrations totales). Spécifiquement, nous considérerons les fonctions **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique** :

$$\cosh(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}, \quad \sinh(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2},$$

les **fonctions de Bessel modifiées de première et deuxième espèce d'ordre zéro** :

$$I_0(z), \quad K_0(z),$$

et les **fonctions de Bessel sphériques modifiées de première et deuxième espèce d'ordre zéro** :

$$i_0(z) = \frac{\sinh(z)}{z}, \quad k_0(z) = \frac{\exp(-z)}{z}.$$

En se référant à chacune des fonctions ci-dessus de manière générique comme $F(z)$, nous nous intéressons à sa dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = ?,$$

ainsi qu'à son intégrale "pondérée" :

$$\int F(z)\, z^{d-1}\, \mathrm{d}z = ?,$$

où $d = 1, 2, 3$ est le nombre de dimensions du problème physique associé à la fonction. Le facteur "$z^{d-1}$" est inclus car il apparaît naturellement dans l'intégration de volume dans des domaines radialement symétriques. Par exemple, supposons que le profil de concentration dans une coque sphérique avec des rayons intérieur et extérieur $R_1$ et $R_2$ est donné par $c(r)$, alors la *concentration moyenne* dans la coque sphérique est donnée par :

$$\overline{c} = \frac{1}{V}\int_V c(r)\, \mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_{R_1}^{R_2} c(r)\, 4\pi r^2\, \mathrm{d}r,$$

où l'élément de volume différentiel, $\mathrm{d}V$, qui correspond à un changement différentiel dans la coordonnée $r$, est donné par $\mathrm{d}V = 4\pi r^2\, \mathrm{d}r$, où $4\pi r^2$ donne la surface d'une sphère de rayon $r$. En guise de brève digression, cela peut aussi être utilisé pour dériver une formule pour le volume de la coque sphérique trouvée dans l'équation ci-dessus :

$$V = \int_V \mathrm{d}V = \int_{R_1}^{R_2} 4\pi r^2\, \mathrm{d}r = \left[\frac{4\pi r^3}{3}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{4\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3}.$$

Nous notons que l'exposant "2" dans le facteur de pondération $r^2$ dans l'intégrale en $r$ découle de la dimensionnalité du problème, qui est $d = 3$ dans la géométrie sphérique considérée – c'est-à-dire qu'un facteur de pondération proportionnel à $r^{d-1}$ doit être inclus dans l'intégrande de l'intégrale en $r$ pour évaluer correctement l'intégrale de volume si le problème est $d$-dimensionnel. Notre expression pour la concentration moyenne prend maintenant la forme :

$$\overline{c} = \frac{3}{4\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)}\int_{R_1}^{R_2} c(r)\, 4\pi r^2\, \mathrm{d}r = \frac{3}{R_2^3 - R_1^3}\int_{R_1}^{R_2} c(r)\, r^2\, \mathrm{d}r.$$

Maintenant, supposons que $c(r)$ représente la solution à un problème de réaction-diffusion du premier ordre stationnaire dans le domaine de la coque sphérique. Alors, il serait donné par une combinaison linéaire des fonctions de Bessel sphériques modifiées de première et deuxième espèce d'ordre zéro, $i_0(r)$ et $k_0(r)$, respectivement. Par conséquent, pour effectuer l'intégration ci-dessus, la connaissance des intégrales de $i_0(r)\, r^2$ et $k_0(r)\, r^2$ par rapport à $r$ serait nécessaire.

Table 1: Identités différentielles

| $d$ | $F(z)$ | $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}$ | $\int F(z)\, z^{d-1}\, \mathrm{d}z$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\cosh(z)$ | $\sinh(z)$ | $\sinh(z)$ |
| | $\sinh(z)$ | $\cosh(z)$ | $\cosh(z)$ |
| 2 | $I_0(z)$ | $I_1(z)$ | $zI_1(z)$ |
| | $K_0(z)$ | $-K_1(z)$ | $-zK_1(z)$ |
| 3 | $i_0(z)$ | $i_1(z)$ | ? |
| | $k_0(z)$ | $-k_1(z)$ | $-z^2k_1(z)$ |

Nous affichons les identités souhaitées dans tbl. 1, où $I_1(z)$ et $K_1(z)$ sont les **fonctions de Bessel modifiées de première et deuxième espèce d'ordre un**, et $i_1(z)$ et $k_1(z)$ sont les **fonctions de Bessel sphériques**

**modifiées de première et deuxième espèce d'ordre un**. Comme leurs homologues d'ordre zéro, $I_1(z)$ et $K_1(z)$ n'ont pas d'expressions analytiques fermées en termes de fonctions élémentaires, tandis que $i_1(z)$ et $k_1(z)$ en ont.

Quelle est l'entrée manquante (?) dans tbl. 1 en termes de $i_1(z)$ ? Choisissez la bonne réponse parmi les options ci-dessous :

a. $z^2 i_1(z)$
b. $-z^2 i_1(z)$
c. $z i_1(z)$
d. $-z i_1(z)$

## 1.14 Absorption d'oxygène dans une éponge

Dans ce problème, nous allons considérer le métabolisme d'une éponge tubulaire jaune dans l'océan. L'éponge tubulaire consomme de l'oxygène et des nutriments qui diffusent dans son corps, qui a la forme d'une *coque cylindrique*. Nous voulons comprendre comment l'éponge tubulaire s'est adaptée à son environnement pour survivre par cette méthode. Tout d'abord, nous allons construire un modèle simple pour analyser l'absorption et la consommation d'oxygène dans l'éponge tubulaire.

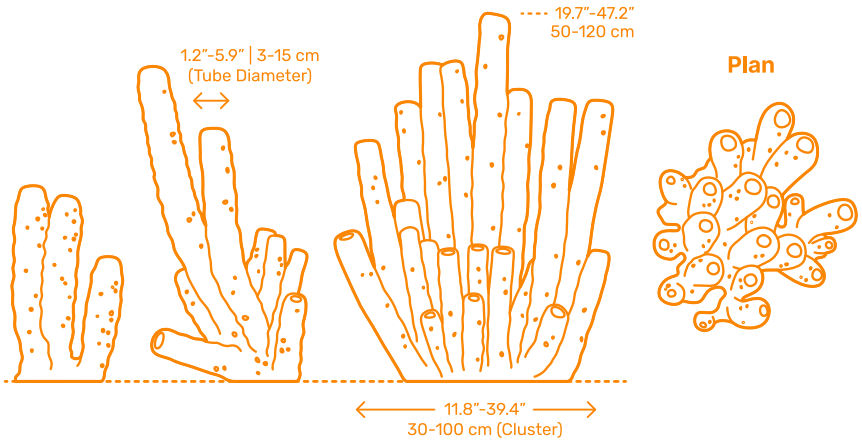



Figure 1: Éponge tubulaire jaune (source : dimensions.com)

Supposons que l'éponge tubulaire ait un rayon intérieur de $R$, et un rayon extérieur $R_{\text{out}} = R + L$, avec la concentration d'oxygène fixée à $c_0$ aux deux surfaces. À l'intérieur du corps de l'éponge, $R \leq r \leq R + L$, les cellules consomment de l'oxygène selon une cinétique du premier ordre, ce qui donne un taux de production en volume d'oxygène de $R_V = -k_V c$. Nous négligerons les effets de bord en haut et en bas de l'éponge tubulaire, supposerons une symétrie radiale, et résoudrons le problème à l'état stationnaire de sorte que $c = c(r)$. Nous commençons par une déclaration différentielle de conservation de la masse d'oxygène en *coordonnées cylindriques* :

$$\frac{D}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r}\right) = k_V c,$$

$$c(R) = c(R + L) = c_0.$$

Nous adimensionnons avec $\Theta = c/c_0$, $\widetilde{r} = r/R$, $\alpha = L/R$, et $\mathrm{Da} = k_V R^2/D$, pour arriver à :

$$\frac{1}{\widetilde{r}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\widetilde{r}}\left(\widetilde{r}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\widetilde{r}}\right) = \mathrm{Da}\,\Theta,$$

$$\Theta\left(1\right) = \Theta\left(1+\alpha\right) = 1.$$

1. Quelle est la solution générale de cette EDO adimensionnelle, avant d'appliquer les conditions aux limites ?
   a. $\Theta\left(\widetilde{r}\right) = A\,\cosh\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\,\widetilde{r}\right) + B\,\sinh\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\,\widetilde{r}\right)$
   b. $\Theta\left(\widetilde{r}\right) = A\,\exp\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\,\widetilde{r}\right) + B\,\exp\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\,\widetilde{r}\right)$
   c. $\Theta\left(\widetilde{r}\right) = A\,K_0\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\,\widetilde{r}\right) + B\,I_0\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\,\widetilde{r}\right)$
   d. $\Theta\left(\widetilde{r}\right) = A\,K_1\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\,\widetilde{r}\right) + B\,I_1\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\,\widetilde{r}\right)$
   e. $\Theta\left(\widetilde{r}\right) = A\,k_0\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\,\widetilde{r}\right) + B\,i_0\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\,\widetilde{r}\right)$
   f. $\Theta\left(\widetilde{r}\right) = A\,k_1\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\,\widetilde{r}\right) + B\,i_1\left(\sqrt{\mathrm{Da}}\,\widetilde{r}\right)$

Maintenant, nous voulons compléter le problème en appliquant les conditions aux limites.

2. Écrivez le système d'équations linéaires pour les coefficients inconnus, $A$ et $B$, en termes des fonctions de Bessel modifiées $K_0$, $K_1$, $I_0$, et $I_1$, ainsi que des variables $A$, $B$, Da, et $\alpha$.

Certaines espèces d'éponges marines sont minces par rapport à leur rayon de courbure, ou $\alpha \ll 1$.

3. Quelle hypothèse simplificatrice peut-on faire dans ce cas ?
4. En introduisant une nouvelle coordonnée cartésienne $x$, avec $x = 0$ à $r = R + L/2$, dérivez la solution approximative $\Theta\left(\widetilde{x}\right)$ pour la concentration adimensionnelle dans l'éponge en termes de $\widetilde{x}$, Da, et $\alpha$.

Nous allons maintenant revenir à notre discussion sur les éponges de toute épaisseur, où la concentration d'oxygène dans l'éponge est donnée par $c = c\left(r\right)$. En général, l'absorption d'oxygène peut ne pas être directement donnée par la concentration d'oxygène dans l'océan autour de l'éponge, mais plutôt par un terme de transfert de masse vers les surfaces extérieure et intérieure de l'éponge. Ainsi, la magnitude de la densité de flux d'oxygène entrant dans l'éponge est donnée par $F = h_m\left(c_\infty - c_{\mathrm{surf}}\right)$, où $h_m$ est un coefficient de transfert de masse (avec des unités de $\mathrm{m\,s^{-1}}$), $c_\infty$ est la concentration d'oxygène dans le volume de l'océan, et $c_{\mathrm{surf}}$ est la concentration d'oxygène à la surface de l'éponge. Nous pouvons écrire le problème mathématiquement comme :

$$\frac{D}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r}\right) = k_V c,$$

$$-D\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r}\left(R\right) = h_m\left(c_\infty - c\left(R\right)\right),$$

$$D\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r}\left(R+L\right) = h_m\left(c_\infty - c\left(R+L\right)\right),$$

et adimensionnons l'équation avec $\Theta = c/c_\infty$, $\widetilde{r} = r/R$, $\alpha = L/R$, et $\mathrm{Da} = k_V R^2/D$, nous obtenons :

$$\frac{1}{\widetilde{r}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\widetilde{r}}\left(\widetilde{r}\frac{\mathrm{d}\Theta =}{\mathrm{d}\widetilde{r}}\right) = \mathrm{Da}\,\Theta,$$

$$-\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\widetilde{r}}\left(1\right) = \mathrm{Bi}\left(1 - \Theta\left(1\right)\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\widetilde{r}}\left(1+\alpha\right) = \mathrm{Bi}\left(1 + \Theta\left(1+\alpha\right)\right).$$

5. Comment doit-on définir le nombre de Biot de transfert de masse, Bi ? Exprimez votre résultat en termes de $h_m$, $R$, $D$, et $L$.

L'introduction du coefficient de transfert de masse entraîne des **conditions aux limites de Robin** dans notre modèle. Bien qu'elles ajoutent de la complexité au système d'équations, en principe, la solution peut être trouvée systématiquement en utilisant les propriétés des fonctions de Bessel modifiées.

6. Déterminez les coefficients, $A$ et $B$, en termes des fonctions de Bessel modifiées $K_0$, $K_1$, $I_0$, et $I_1$, ainsi que des variables $A$, $B$, Da, $\alpha$, et Bi.

## 1.15 Échelle de longueur de convection-diffusion

L'équation stationnaire de **convection-diffusion** en 1D :

$$-U\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = D\frac{\mathrm{d}^2c}{\mathrm{d}x^2},$$

où $U > 0$ est la magnitude de la vitesse constante descendante du fluide, lorsqu'elle est soumise aux conditions aux limites suivantes :

$$c\,(0) = c_0, \quad c\,(\infty) = 0,$$

a pour solution :

$$c\,(x) = c_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right),$$

où $\delta$ est appelée la **longueur de convection-diffusion**. Laquelle des affirmations suivantes concernant $\delta$ est *incorrecte* ?

a. $\delta = D/U$
b. $c \simeq c_0$ pour $x \gg \delta$
c. Près de la membrane ($x = 0$), il y a une couche limite de concentration dont l'épaisseur est de l'ordre de $\delta$
d. La concentration totale de particules dans le liquide (par unité de surface transversale) s'échelonne comme $c_0\delta$

## 1.16 Équilibre de dérive-diffusion dans un champ de force uniforme

Considérons un champ de force conservatif, $\mathbf{f} = -f_0\hat{\mathbf{x}}$, dans un domaine semi-infini $x \in [0, \infty)$, où $f_0 > 0$ est un paramètre constant. Un grand nombre de particules non interactives sont soumises à une dérive-diffusion sous l'influence de ce champ de force jusqu'à ce qu'un profil de concentration stationnaire $c\,(x)$ soit atteint. Désignons la diffusivité et la mobilité de chaque particule par $D$ et $M$ respectivement.

À l'état stationnaire, laquelle des affirmations suivantes est *incorrecte* ?

a. La concentration de particules est la plus élevée à $x = 0$
b. La diffusion pousse les particules vers des $x$ plus grands, tandis que la dérive pousse les particules vers des $x$ plus petits, les contributions de flux résultantes s'annulant mutuellement pour tous les $x$
c. L'énergie potentielle de chaque particule, $\epsilon\,(x)$, diminue linéairement avec $x$
d. Il y a une couche limite près de $x = 0$ dont l'épaisseur $\delta$ est de l'ordre de $D/\,(Mf_0)$

## 1.17 L'atmosphère de Vénus

Nous pouvons appliquer la même analyse à d'autres planètes, comme Vénus, notre voisine dans le système solaire. L'atmosphère de Vénus est principalement composée de dioxyde de carbone. Bien que la température

de surface sur Vénus fluctue beaucoup plus que sur Terre, nous pouvons supposer une température de surface moyenne de 740 K. L'accélération gravitationnelle sur Vénus est d'environ 90 % de celle sur Terre, soit $8.9\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Estimez l'épaisseur de l'atmosphère de Vénus. Comment se compare-t-elle à celle de la Terre ? Choisissez la bonne réponse parmi les options ci-dessous.

a. Beaucoup plus épaisse – plus de 10 fois plus épaisse
b. Beaucoup plus mince – plus de 10 fois moins épaisse
c. Ni l'un ni l'autre – comparable en ordre de grandeur

## 1.18 Diffusion transversale dans un écoulement uniforme

Considérez la configuration de "diffusion transversale" analysée en classe. En utilisant les notations introduites, laquelle des affirmations suivantes est *incorrecte* ? Supposez $c_2 > c_1$.

a. La *convection axiale* amène les particules en aval dans la direction positive de $x$
b. La *diffusion transversale* amène les particules loin de la surface inférieure à $y = 0$ dans la direction positive de $y$
c. L'épaisseur de la couche limite est indépendante de $x$
d. $\delta$ est l'échelle de longueur pour la diffusion dans la direction $y$

## 1.19 Analyse de la réaction-diffusion-convection

Jusqu'à présent, nous avons examiné les échelles des systèmes de **réaction-diffusion** et de **convection-diffusion**, qui sont caractérisés respectivement par les groupes adimensionnels Da et Pe. Dans ce problème, nous allons considérer un système chimique où les trois processus – **réaction**, **diffusion** et **convection** – sont présents simultanément. Considérez la configuration représentée dans la fig. 2.

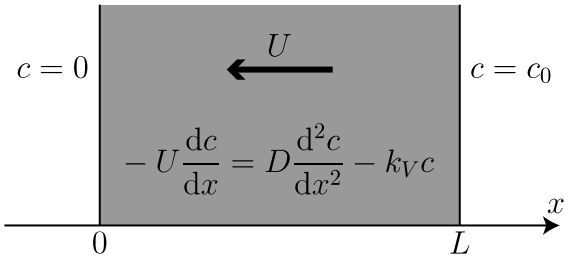



Figure 2: Dalle de catalyseur poreux

Le réactif entre dans une dalle de catalyseur poreux d'épaisseur $L$ depuis un réservoir via sa frontière $x = L$, où la concentration du réactif est maintenue à $c_0$. À la frontière $x = 0$, nous maintenons $c = 0$ à tout moment en éliminant rapidement tout réactif non utilisé. Le réactif est consommé par une réaction de premier ordre dans tout le catalyseur poreux avec une constante de vitesse $k_V$. Il y a un écoulement uniforme constant avec une vitesse $-U\hat{\mathbf{x}}$, et les particules ont une diffusivité chimique constante $D$. À l'état stationnaire, ce problème de **réaction-diffusion-convection** en 1D est décrit par l'EDO linéaire et les conditions aux limites suivantes :

$$-U\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = D\frac{\mathrm{d}^2c}{\mathrm{d}x^2} - k_V c,$$
$$c\,(0) = 0, \quad c\,(L)\,c_0.$$

Nous commençons notre analyse en rendant le problème adimensionnel. Nous définissons les **variables adimensionnelles** suivantes :

$$\Theta = \frac{c}{c_0}, \quad \widetilde{x} = \frac{x}{L},$$

et les **paramètres adimensionnels** suivants :

$$\mathrm{Da} = \frac{k_V L^2}{D}, \quad \mathrm{Pe} = \frac{UL}{D}.$$

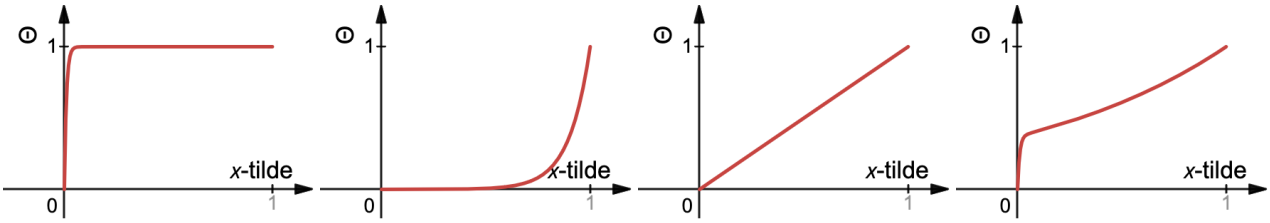
1. Complétez la formulation adimensionnelle du problème.
2. Dérivez la solution analytique du problème adimensionnel de réaction-diffusion-convection, écrivez-la sous la forme suivante

$$\Theta\left(\widetilde{x}\right) = \exp\left[\alpha\left(1-\widetilde{x}\right)\right]\frac{\sinh\left(\beta\widetilde{x}\right)}{\sinh\beta},$$

   et exprimez les paramètres constants $\alpha$ et $\beta$ en termes de Da et Pe.

L'intuition physique joue un rôle crucial dans l'analyse des phénomènes de transport. Nous aimerions pouvoir prédire les caractéristiques clés de la solution à un problème de transport basé sur des intuitions physiques et une analyse simple (*par exemple*, mise à l'échelle), sans dériver la solution complète.

Pour illustrer, les figures suivantes sont des tracés de la solution, $\Theta\left(\widetilde{x}\right)$, de ce problème stationnaire de réaction-diffusion-convection en 1D pour différents nombres de Damköhler et de Péclet.




3. Faites correspondre chacune des figures à ses Da et Pe correspondants. Pour ce faire, considérez la signification physique de chaque paramètre étant beaucoup plus petit ou plus grand que un. Vous pouvez également vérifier votre intuition en évaluant la solution exacte pour chaque combinaison de paramètres.
   - $\mathrm{Da} = 0.01$ , $\mathrm{Pe} = 0.01$
   - $\mathrm{Da} = 100$ , $\mathrm{Pe} = 0.01$
   - $\mathrm{Da} = 0.01$ , $\mathrm{Pe} = 100$
   - $\mathrm{Da} = 100$ , $\mathrm{Pe} = 100$

Dans la première figure, nous observons une couche limite près de la frontière $\widetilde{x} = 0$. Désignons l'épaisseur adimensionnelle de cette couche limite par $\widetilde{\delta}_a$, que nous avons définie comme l'épaisseur dimensionnelle de la couche limite, $\delta_a$, mise à l'échelle de la largeur du domaine, $L$. De même, désignons l'épaisseur adimensionnelle de la couche limite près de $\widetilde{x} = 1$ dans la deuxième figure par $\widetilde{\delta}_b$.

4. Établissez des estimations d'échelle pour $\widetilde{\delta}_a$ et $\widetilde{\delta}_b$.
   a. $\widetilde{\delta}_a \sim 0.1$ , $\widetilde{\delta}_b \sim 0.1$
   b. $\widetilde{\delta}_a \sim 0.1$ , $\widetilde{\delta}_b \sim 0.01$
   c. $\widetilde{\delta}_a \sim 0.01$ , $\widetilde{\delta}_b \sim 0.1$
   d. $\widetilde{\delta}_a \sim 0.01$ , $\widetilde{\delta}_b \sim 0.01$

## 1.20 Ségrégation des impuretés dans la solidification directionnelle

L'équation de "bilan de masse (espèces) interfacial"

$$U\left[c\left(0\right)-c_s\right)=-D\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\left(0\right),$$

peut être dérivée de l'énoncé général de **conservation à une interface stationnaire** :

$$\widehat{\mathbf{n}}\cdot\left(\mathbf{F}_2-\mathbf{F}_1\right)=R_S.$$

Supposons que nous choisissions $\widehat{\mathbf{n}}=\widehat{\mathbf{x}}$, en ce qui concerne la dérivation du bilan interfacial, laquelle des affirmations suivantes est *incorrecte* ?

a. $c_s$ est évalué du côté solide de l'interface, tandis que $c\left(0\right)$ et $\mathrm{d}c/\mathrm{d}x\left(0\right)$ sont évalués du côté liquide de l'interface
b. La vitesse de l'interface, mesurée dans la direction $\widehat{\mathbf{n}}$, est donnée par $v_s=-U$
c. La densité de flux dans le solide à l'interface est donnée par $\mathbf{F}_1=-c_sU\widehat{\mathbf{x}}$
d. La densité de flux dans le liquide à l'interface est donnée par $\mathbf{F}_2=\left[-c\left(0\right)U-D\mathrm{d}c/\mathrm{d}x\left(0\right)\right]\widehat{\mathbf{x}}$
e. Le taux de production dû aux réactions de surface est donné par $R_S=0$

L'équation suivante relie la concentration d'impuretés dans le solide, $c_s$, à la concentration d'impuretés dans le réservoir, $c_0$.

$$c_s=\frac{\mathrm{H}\,c_0}{\mathrm{H}+\left(1+\mathrm{H}\right)\exp\left(\mathrm{Pe}\right)}$$

Nous avons conclu que le nombre de Péclet joue un rôle clé dans cette relation.

Pour le cas typique $\mathrm{H}\ll 1$, laquelle des interprétations physiques suivantes de ce résultat est *incorrecte* ?

a. À $\mathrm{Pe}\to 0$, nous avons $c_s\to\mathrm{H}\,c_0$. Dans ce régime, nous sommes capables de produire un solide qui contient beaucoup moins d'impuretés que le liquide, bien qu'à un faible taux de production
b. À $\mathrm{Pe}\to\infty$, nous avons $c_s\to c_0$. Dans ce régime, nous sommes capables de produire le solide à un débit élevé, bien qu'il conserverait toutes les impuretés trouvées dans le liquide
c. Puisque $c_s=\mathrm{H}\,c\left(0\right)$ est toujours vrai, Pe contrôle $c_s$ en affectant le profil $c\left(x\right)$, avec $c\left(0\right)$ s'écartant de $c_0$ de différentes quantités à différents Pe
d. Pour $\mathrm{Pe}\ll 1$, nous avons $\delta\gg L$. La convection domine sur la diffusion dans toute la région $0\leq x\leq L$, et $c\left(x\right)\simeq c_0$ pour tous les $x$
e. Pour $\mathrm{Pe}\gg 1$, nous avons $\delta\ll L$. Une fine couche limite de concentration d'épaisseur $\sim\delta$ se forme près de $x=0$, à travers laquelle la concentration d'impuretés varie brusquement de $c\left(0\right)$ à $x=0$ à environ $c_0$ à $x\gg\delta$